



Андрій Сясєв – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математичного аналізу та оптимізації Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, Україна.

Коло наукових інтересів: математичне моделювання, диференціальні рівняння, теоретико-методологічні засади вищої та загальної середньої освіти, інформаційні технології і засоби навчання.

✉ syasevand@gmail.com

ORCID <https://orcid.org/0000-0002-0654-7360>

УДК 378.147:517.9

<https://doi.org/10.32405/2411-1317-2025-2-151-165>

Подано до редакції: 30.03.2025
Прийнято після рецензування: 27.04.2025
Затверджено до друку: 01.05.2025
Опубліковано: 30.06.2025

АСПЕКТИ МЕТОДИКИ ВИКЛАДАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ: СУЧАСНІ ПІДХОДИ, ТРУДНОЩІ ТА МЕТОДИ ЇХ ПОДОЛАННЯ

Анотація. У статті представлено комплекс сучасних методичних підходів до викладання диференціальних рівнянь у вищій школі, спрямованих на подолання типових труднощів, з якими стикаються студенти під час засвоєння як теоретичних засад, так і прикладного змісту курсу. Зазначено, що традиційне зосередження на механічному виконанні обчислень часто не забезпечує глибокого розуміння, тому акценти навчального процесу доцільно зміщувати в бік формування концептуального бачення. Один із провідних підходів – застосування множинних репрезентацій (аналітичної, графічної, табличної), що дозволяє студентам осмислювати поняття з різних кутів зору, розвивати вміння переключатися між формами подання інформації та краще розуміти сутність розв'язків диференціальних рівнянь.

Важливою складовою є контекстуалізація математичних абстракцій через реальні прикладні задачі з природничих та соціально-економічних наук. Студенти працюють з моделями, які мають конкретний зміст – радіоактивний розпад, динаміка популяцій, епідеміологічні процеси, теплообмін тощо – що знижує рівень тривожності при вивченні складних тем і підвищує інтерес до предмета. Активні методи навчання – дискусії, малі групи, дослідницькі запитання, аналіз типових помилок – сприяють формуванню критичного мислення, розвитку навичок самостійного аналізу та колективного розв'язання задач.

Значна увага приділена використанню цифрових технологій. Викладено досвід застосування систем комп'ютерної алгебри (Maple, Mathematica, MATLAB), програм для візуалізації (GeoGebra, GeomED, STELLA) і навіть електронних таблиць для реалізації чисельних методів. Подано приклади навчальних проєктів, у яких студенти моделюють реальні процеси – рух маятника, поширення інфекцій, теплообмін – виконуючи повний цикл від постановки задачі до інтерпретації результатів. Такий підхід сприяє не лише засвоєнню матеріалу, а й формуванню міждисциплінарного мислення, дослідницьких навичок і впевненості у використанні математики як інструменту для вивчення реального світу. Стаття може бути корисною викладачам математики, методистам, дослідникам і всім, хто зацікавлений в удосконаленні математичної освіти.

Ключові слова: диференціальні рівняння; множинні репрезентації; комп'ютерне моделювання; візуалізація; активне навчання; проєктний підхід; контекстуалізація; системи комп'ютерної алгебри.

Постановка проблеми. Викладання математичних дисциплін, зокрема розділу диференціальних рівнянь, традиційно належить до складних аспектів підготовки студентів природничих і технічних спеціальностей. Це зумовлено поєднанням високого рівня абстрактності математичного матеріалу з необхідністю глибокого змістовного розуміння та практичного застосування. Диференціальні рівняння оперують новими для студентів поняттями, які значно відрізняються від типових задач алгебри чи математичного аналізу. Зокрема, терміни на кшталт *загальний* чи *особливий розв'язок*, *стійкість* або *початкова умова* без належного контексту можуть залишатися для студентів абстрактними та важкими для інтерпретації.

На практиці спостерігається домінування формального, алгоритмічного підходу до розв'язування задач, коли основна увага приділяється засвоєнню послідовностей дій (наприклад, методу відокремлення змінних або інтегруючого множника), а не глибокому розумінню змісту цих операцій. Такий процедурний стиль навчання часто призводить до того, що студенти, попри здатність знайти розв'язок, не розуміють його поведінки, не можуть інтерпретувати вплив початкових умов чи надати фізичне або геометричне пояснення отриманим результатам.

Особливою проблемою є складність у переході між різними формами подання розв'язків. Студенти орієнтуються переважно на аналітичні методи, уникаючи або не розуміючи графічних (поля напрямків, фазові портрети) та чисельних інтерпретацій. Це свідчить про глибшу дидактичну проблему – розрив між формальними математичними процедурами та інтуїтивним розумінням, а також обмежене використання міжпредметних зв'язків, прикладного контексту й сучасного інструментарію. Дослідження показують, що студенти часто не можуть перенести математичні знання у сферу природничих наук, що обмежує їхнє розуміння ролі диференціальних рівнянь як засобу математичного моделювання реальних процесів.

У цьому контексті постає необхідність системного оновлення методики викладання диференціальних рівнянь, орієнтованого на подолання зазначених труднощів. Актуальним є впровадження дидактичних підходів, які сприятимуть формуванню цілісного уявлення про природу диференціальних рівнянь, посиленню міжпредметних зв'язків, розвитку інтерпретаційних і моделювальних навичок студентів. Проблема викладання диференціальних рівнянь сьогодні перебуває у фокусі не лише освітньої практики, а й педагогічної науки, що зумовлює потребу в її глибокому осмисленні відповідно до сучасних викликів вищої освіти.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Сучасна методика викладання диференціальних рівнянь в умовах трансформації освіти характеризується динамічним поєднанням класичних підходів із новітніми цифровими та інтерактивними технологіями. Диференціальні рівняння, як важливий розділ вищої математики, вимагають від студентів не лише теоретичних знань, а й високого рівня абстрактного мислення, математичного моделювання та здатності до застосування знань на практиці. У цьому контексті актуальним є пошук ефективних педагогічних рішень, які сприятимуть формуванню математичної та професійної компетентності студентів.

Одним із провідних напрямів удосконалення методики викладання є впровадження інформаційно-комунікаційних технологій у навчальний процес. Зокрема, дослідження (В. І. Ключко & Бондаренко, 2004) акцентує увагу на ефективності використання комп'ютерних засобів навчання під час вивчення теми «Диференціальні рівняння» у технічному ВНЗ. Застосування відповідного програмного забезпечення (MathCAD, MATLAB, Simulink) дозволяє не лише підвищити наочність викладу, але й забезпечити інтерактивність і варіативність розв'язування задач (Krasnozhan, 2010; Pekh et al., 2022).

Поряд із цим, важливим є компетентнісний підхід, який передбачає орієнтацію на результати навчання, зокрема формування математичної та дослідницької компетентностей. У праці (В. Ключко, 2019) розкрито значення математичної компетентності як інтегрального результату

навчання математики у технічних ВНЗ. Це положення узгоджується з висновками Сітака (Сітак, 2018), який акцентує на важливості професійної спрямованості підготовки майбутніх ІТ-фахівців у процесі вивчення диференціальних рівнянь. Також перспективним видається підхід, запропонований у (Петренко & Чепок, 2023), щодо факультативного впровадження елементів теорії диференціальних рівнянь у загальну середню освіту, що забезпечує довузівську підготовку та ранній розвиток математичних здібностей учнів.

У новітньому педагогічному контексті важливим чинником є загальна технологізація освітнього процесу. У дослідженні (Кравченко, 2024) розкрито особливості впливу інтеграційних процесів на реформування освіти в Україні, зокрема через впровадження нових технологій і зміну освітніх парадигм. Ці зміни безпосередньо впливають на зміст і методи викладання диференціальних рівнянь, зумовлюючи потребу у переорієнтації від механічного засвоєння формул до формування здатності до аналізу та моделювання.

Новим викликом сучасності стало активне впровадження STEM-підходу, що ґрунтується на інтеграції наукових знань і практичного застосування. У роботі (Khotimah et al., 2022) запропоновано STEM-орієнтований модуль із застосуванням технології відкритого навчання (discovery learning), що забезпечує формування дослідницьких навичок та стимулює критичне мислення. Подібні підходи підвищують мотивацію студентів через залучення до реальних або змодельованих проблемних ситуацій. У дослідженні (Hubal et al., 2024) зазначено, що цифрові технології у STEM-дисциплінах не лише актуалізують зміст навчання, а й дозволяють адаптувати освітні траєкторії під індивідуальні потреби студентів, що особливо важливо при опануванні складного математичного матеріалу.

Окрему нішу в дослідженнях методики викладання посідають цифрові та імерсивні технології. Доведено ефективність використання доповненої реальності (AR) та QR-кодів для залучення студентів до активного пізнання (AlNajdi, 2022, с. 1), що підтверджується результатами системного огляду (Lampropoulos et al., 2022, с. 1). Такі технології особливо актуальні для візуалізації складних математичних об'єктів, зокрема фазових траєкторій, динаміки систем та процесів, які описуються диференціальними рівняннями.

Водночас ефективним інструментом для подолання труднощів абстрактного мислення є гейміфікація. За результатами огляду (Jaramillo-Mediavilla et al., 2024, с. 8) використання елементів гри в навчанні сприяє зростанню академічної успішності та залученості студентів. Практичні приклади застосування гейміфікації в технічній освіті наведено у статті (Verma, 2023), де показано, що змагальність, нагороди та візуалізація прогресу є ефективними мотиваторами.

Організація самостійної роботи студентів відіграє ключову роль у подоланні труднощів засвоєння диференціальних рівнянь. Робота (Морозова, 2024) підкреслює, що саме через самостійну діяльність формується здатність до аналітичного мислення й ефективного засвоєння складних понять. Це узгоджується з результатами дослідження (Dumanska et al., 2022), де визначено, що розвиток STEM-компетенцій у майбутніх учителів математики нерозривно пов'язаний з умінням організовувати самостійну діяльність.

Важливим аналітичним джерелом є систематичний літературний огляд (Lozada et al., 2021, с. 15), який узагальнює сучасні методики викладання диференціальних рівнянь у світовій практиці. Автори відзначають, що найбільшу ефективність демонструють підходи, які поєднують цифрові технології, активні методи навчання, міждисциплінарність і практичну орієнтацію, що повністю узгоджується з тенденціями, виявленими в українських джерелах.

Варто також зазначити про зростання ролі міждисциплінарного підходу при викладанні математичних дисциплін у цілому. Сучасні дослідники демонструють потенціал використання прикладних моделей (економічних, бойових тощо), що ґрунтуються на диференціальних рівняннях (Марценюк та ін., 2021; Фурсенко та ін., 2024) та розкривають потенціал інтеграції тем дискретної математики з темами диференціальних рівнянь у навчальному процесі (Страх & Лукашова, 2021).

Узагальнюючи вищезазначене, можна констатувати, що ефективно викладання диференціальних рівнянь потребує:

- інтеграції цифрових технологій (AR, гейміфікація, комп'ютерні моделі);
- орієнтації на професійні компетентності та міждисциплінарність;
- активізації самостійної та дослідницької діяльності студентів;
- модернізації змісту через прикладні й контекстуальні завдання.

Отже, подолання труднощів у вивченні диференціальних рівнянь можливе лише за умови комплексного оновлення методики викладання, що поєднує інноваційність, практичність і гнучкість педагогічного процесу.

Метою статті є виявлення ключових когнітивних та методичних бар'єрів у процесі вивчення диференціальних рівнянь, а також обґрунтування сучасних освітніх стратегій, які дозволяють суттєво підвищити якість навчального процесу. У роботі здійснюється аналіз теоретичних основ і практичних прикладів застосування таких підходів, як множинні репрезентації, контекстуалізація через прикладні задачі, активні форми навчання, інтеграція комп'ютерного моделювання та візуалізації.

Наукова новизна дослідження полягає у комплексному розгляді методичних засобів, що спрямовані на гармонійне поєднання формального і змістовного компонентів навчання, розвитку креативності, самостійності та дослідницьких умінь студентів.

Методи дослідження. У дослідженні застосовано комплекс методів і інструментів, спрямованих на підвищення ефективності викладання диференціальних рівнянь. Основу підходу становить використання множинних репрезентацій навчального матеріалу – аналітичної, графічної та табличної, що сприяло розвитку здатності студентів переходити між різними формами подання інформації та глибшому розумінню розв'язків. Контекстуалізація математичних понять через прикладні задачі з природничих і соціально-економічних наук дозволила підвищити мотивацію студентів і знизити рівень тривожності. Активні методи навчання, зокрема дискусії, робота в малих групах і аналіз типових помилок, сприяли формуванню критичного мислення та самостійності. Широке застосування цифрових технологій – систем комп'ютерної алгебри (Maple, Mathematica, MATLAB), програм для візуалізації (GeoGebra, GeomED, STELLA) та електронних таблиць – забезпечило автоматизацію обчислень, покращення візуалізації розв'язків і розвиток навичок чисельного моделювання. Проектний підхід, що передбачав моделювання реальних процесів (рух маятника, теплообмін, епідеміологічні моделі), сприяв розвитку дослідницьких умінь, міждисциплінарного мислення та впевненості студентів у використанні математичних методів.

Результати дослідження та їх обговорення. Розглянемо спочатку *методику та стратегії для полегшення розуміння матеріалу*. Щоб подолати зазначені труднощі, сучасна методика викладання диференціальних рівнянь зміщує акцент із простого відпрацювання алгоритмів на *глибше концептуальне освоєння*. Однією зі стратегій є використання *множинних репрезентацій*: студенти повинні працювати не тільки з формулами, але й з графіками та числовими експериментами. Наприклад, при дослідженні рівняння

$$y' = 2x(1 - y)$$

корисно одразу будувати поле напрямків – напрямки дотичних до розв'язків цього рівняння (рис.1) і просити студентів якісно змальовувати сімейства інтегральних кривих. Така візуалізація, наприклад, засобами GeoGebra, дає уявлення про поведінку розв'язків навіть без точного (аналітичного) розв'язання. Студент краще розуміє, як виглядають розв'язки, навіть якщо не пам'ятає точну формулу. Взагалі, переключення між символічним, графічним і табличним підходами сприяє формуванню міцнішого знання – кожне поняття осмислюється з різних боків. Це адресує проблему “перекладу” між поданнями: практикуючи, студент вчиться бачити за формулою її графік і навпаки.

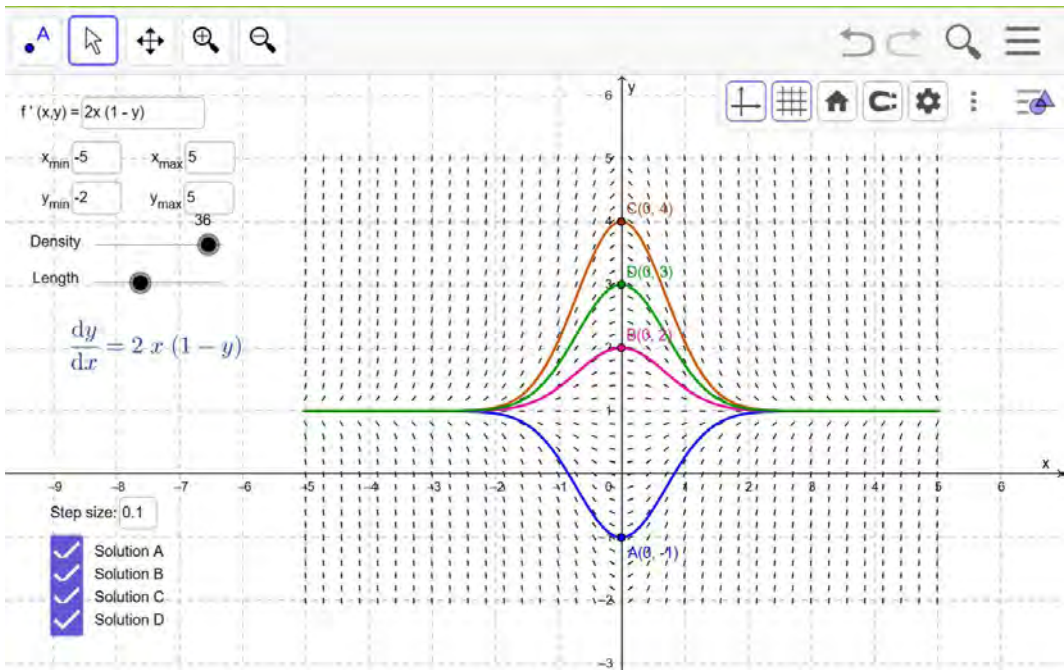


Рис. 1. Поле напрямків для рівняння $y' = 2x(1 - y)$: суцільні лінії – інтегральні криві

Другою ключовою методикою є *контекстуалізація* математичних абстракцій через прикладні задачі. Замість того, щоб виводити рівняння «у вакуумі», викладач пропонує реальні ситуації (моделі з фізики, біології, економіки), які описуються диференціальними рівняннями (ДР). Такий *проблемно-орієнтований підхід* показує студентам сутність рівняння: наприклад, в задачі про радіоактивний розпад чи зростання популяції формула набуває чіткого значення. Обговорення прикладів допомагає зняти «страх» перед новою темою, адже студенти бачать, що ДР – це просто інструмент для опису зрозумілих процесів. Крім того, постановка відкритих задач (де треба самостійно вивести диференціальне рівняння для певної ситуації) розвиває глибше розуміння структури ДР. Студенти вчаться, звідки беруться рівняння, які припущення закладено в модель – це формує більш усвідомлене ставлення до подальшого розв’язання.

Важливим елементом стало запровадження *активних методів навчання* на лекціях і практичних заняттях. Замість пасивного слухання довгих теоретичних викладів студенти залучаються до *дискусій, групового розв’язання задач*, дослідження «що, якщо» сценаріїв. Наприклад, після введення нового методу можна дати невелику концептуальну задачу: «Як поведе себе розв’язок при таких початкових умовах?» або «Чи може розв’язок вибухнути за скінченний час?». Обговорення в малих групах стимулює студентів самостійно робити висновки, ставити запитання один одному. Така активна участь допомагає краще закріпити матеріал і виявити приховані непорозуміння. Крім того, практика показує ефективність *методу навчання через помилки*: розбираючи типові помилки (наприклад, неправильне застосування формули або плутання знаків при пошуку інтегруючого множника), викладач відразу коригує хибні уявлення. Усе це формує у студентів більш міцний фундамент для оволодіння диференціальними рівняннями.

Використання технологій у викладанні диференціальних рівнянь. Сучасні інформаційні технології стають потужним союзником викладача. Зокрема, при вивченні диференціальних рівнянь широко застосовуються комп’ютерні засоби моделювання та обчислення. Одним із напрямів є використання систем комп’ютерної алгебри (CAS) – таких, як Maple, Mathematica, MATLAB. Ці програми здатні виконувати рутинні аналітичні перетворення: інтегрувати, знаходити ча-

стинні розв'язки, будувати графіки. Уведення CAS у навчальний процес дозволяє студентам зосередитися на *осмисленні результатів*, а не тонути в алгебраїчних обчисленнях. Дослідники відзначають, що використання Maple на практичних заняттях сприяє розвитку вмінь будувати графіки розв'язків і покращує алгебраїчні навички студентів (Lozada et al., 2021, с. 15). Фактично, комп'ютер бере на себе технічну частину роботи, а студент витрачає більше часу на аналіз поведінки розв'язку, експериментування з параметрами моделі тощо.

Іншим важливим технологічним інструментом є *візуалізація диференціальних рівнянь*. Існують спеціальні програми і додатки, призначені для наочного відображення полів напрямків, фазових площин, моделей динамічних систем. Наприклад, для навчальних цілей було розроблено програму GeomED, що дозволяє інтерактивно будувати та досліджувати поле напрямків диференціального рівняння (Lozada et al., 2021). Студенти можуть змінювати рівняння та ментально бачити, як змінюється конфігурація напрямків і траєкторій – це значно полегшує розуміння впливу різних членів рівняння на характер розв'язків. Інший інструмент – програмне середовище STELLA, яке застосовується для імітації реальних процесів на основі систем диференціальних рівнянь. Наприклад (рис. 2), моделлю *каскаду резервуарів* (послідовне витікання рідини) можна керувати в STELLA, змінюючи параметри і спостерігаючи, як це відображається на графіках розв'язків. Така *комп'ютерна симуляція* робить навчання динамічним: студенти експериментують, самі відкриваючи закономірності, які інакше побачили б лише через формули.

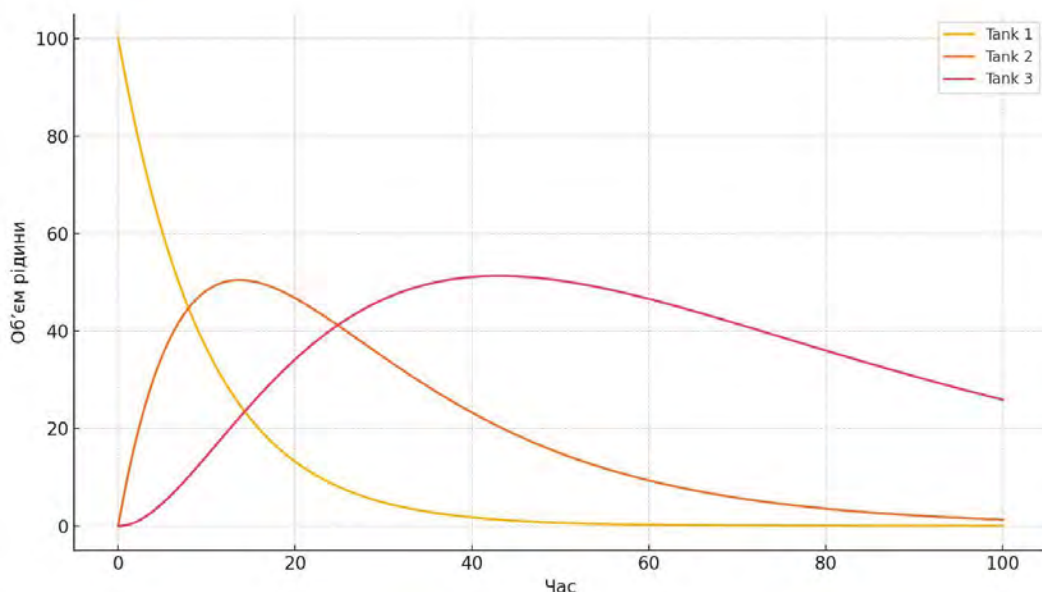


Рис. 2. Каскадна модель резервуарів

Графіки на рис. 2 ілюструють зміну об'єму рідини в кожному з трьох резервуарів з часом. Як бачимо: обсяг у Tank 1 поступово зменшується через витікання, Tank 2 спочатку наповнюється, а потім теж починає спадати, Tank 3 реагує із затримкою та зрештою також досягає максимуму і поступово спорожнюється.

Окрім спеціалізованих систем, широко використовуються звичайні *офісні та онлайн-інструменти* для чисельного моделювання. Наприклад, навіть електронні таблиці (Excel, Google Sheets) можуть бути застосовані для наближеного розв'язання диференціальних рівнянь. За допомогою таблиць студенти можуть реалізувати прості чисельні методи (наприклад, метод Ейле-

ра) і крок за кроком обчислити траєкторію інтегральних кривих. Така практична робота розвиває інтуїцію: студенти бачать, як крок інтегрування чи зміна початкових даних впливає на точність і форму розв'язку. Цей підхід зближує формули з конкретними числами і графіками, що особливо корисно для тих, хто важко сприймає чисту теорію. До того ж, оволодіння інструментами чисельного моделювання готує студентів до використання диференціальних рівнянь у реальних прикладних задачах, де аналітичного розв'язку може не існувати.

Приклади ефективних методичних підходів до викладання диференціальних рівнянь. Для ілюстрації наведемо декілька прикладів, як згадані вище стратегії та технології можуть бути застосовані на практиці.

- *Моделювання вільного падіння через електронні таблиці.* В одному з досліджень студентам було запропоновано власноруч створити модель диференціального рівняння, що описує рух тіла під дією гравітації (вільне падіння з урахуванням опору повітря). Студенти будували модель у вигляді таблиці, де крок за кроком обчислювали зміну швидкості та пройденого шляху. Ця діяльність спонукала їх подумати над фізичним змістом рівняння і взаємозв'язком між величинами, а не просто підставляти у формули. За підсумками, учасники експерименту продемонстрували кращі результати в розумінні як математичних, так і фізичних аспектів задачі порівняно з тими, хто вивчав тему традиційно.
- *Використання програм (інтерактивних середовищ) для візуалізації та аналізу.* Інший ефективний підхід – інтеграція спеціальних навчальних програм (інтерактивних середовищ) безпосередньо в курс диференціальних рівнянь. Наприклад, студенти працювали у інтерактивних середовищах GeoGebra, GeomED, LibreTexts, Desmos для побудови поля напрямків і дослідження поведінки розв'язків на площині. Регулярна практика з візуалізацією дала змогу подолати труднощі з інтерпретацією задач: студенти стали краще розуміти зміст розв'язку, усвідомили існування цілої сім'ї траєкторій і роль початкових умов. Подібно, використання пакету HPGSolver для моделювання динаміки популяцій (класична модель хижак–жертва) дозволило навчити студентів зв'язувати рівняння з реальними процесами. Замість сухого абстрактного аналізу, вони бачили на екрані (рис. 3) «населення» двох видів, що змінюється за законами моделі, і глибше розуміли природу коливань та стабільності розв'язків.

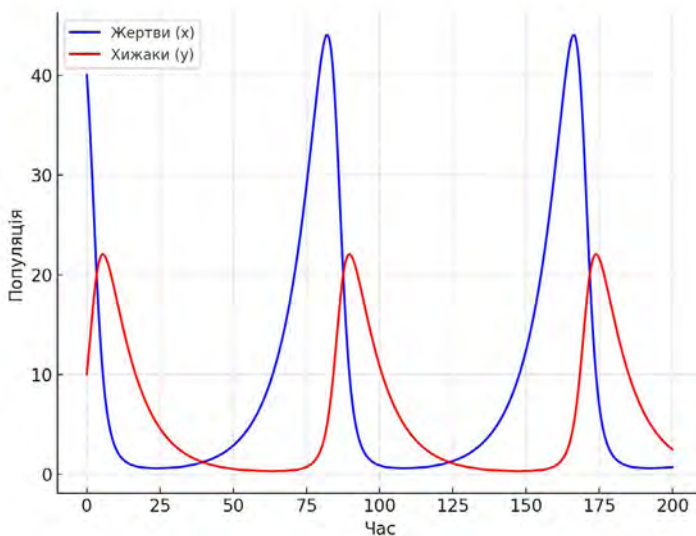


Рис. 3. Візуалізація моделі Лотки-Вольтерри (хижак-жертва)

- Застосування *Maple* для підтримки алгебраїчних навичок. У Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара успішно впроваджено практику розв'язування частини задач за допомогою CAS. Наприклад, після вручну проведеного аналізу типового рівняння студентам пропонується перевірити свої результати в *Maple* – побудувати графік знайденого аналітичного розв'язку чи знайти альтернативні чисельні розв'язки (рис. 4) та порівняти їх. Дослідження показали, що така взаємодія з CAS покращує майстерність студентів: вони вчать перевіряти правильність обчислень, експериментувати з різними параметрами і випадками. Студенти відзначали, що побачити графічно, як виглядає їхній розв'язок, було надзвичайно корисно для розуміння – особливо в задачах, де розв'язок містить параметри або має кілька гілок. *Maple* також допоміг виявити прогалини в алгебраїчних маніпуляціях: якщо комп'ютерний розв'язок не співпадав з ручним, студент повертався і шукав помилку, чим закріплював теоретичний матеріал.

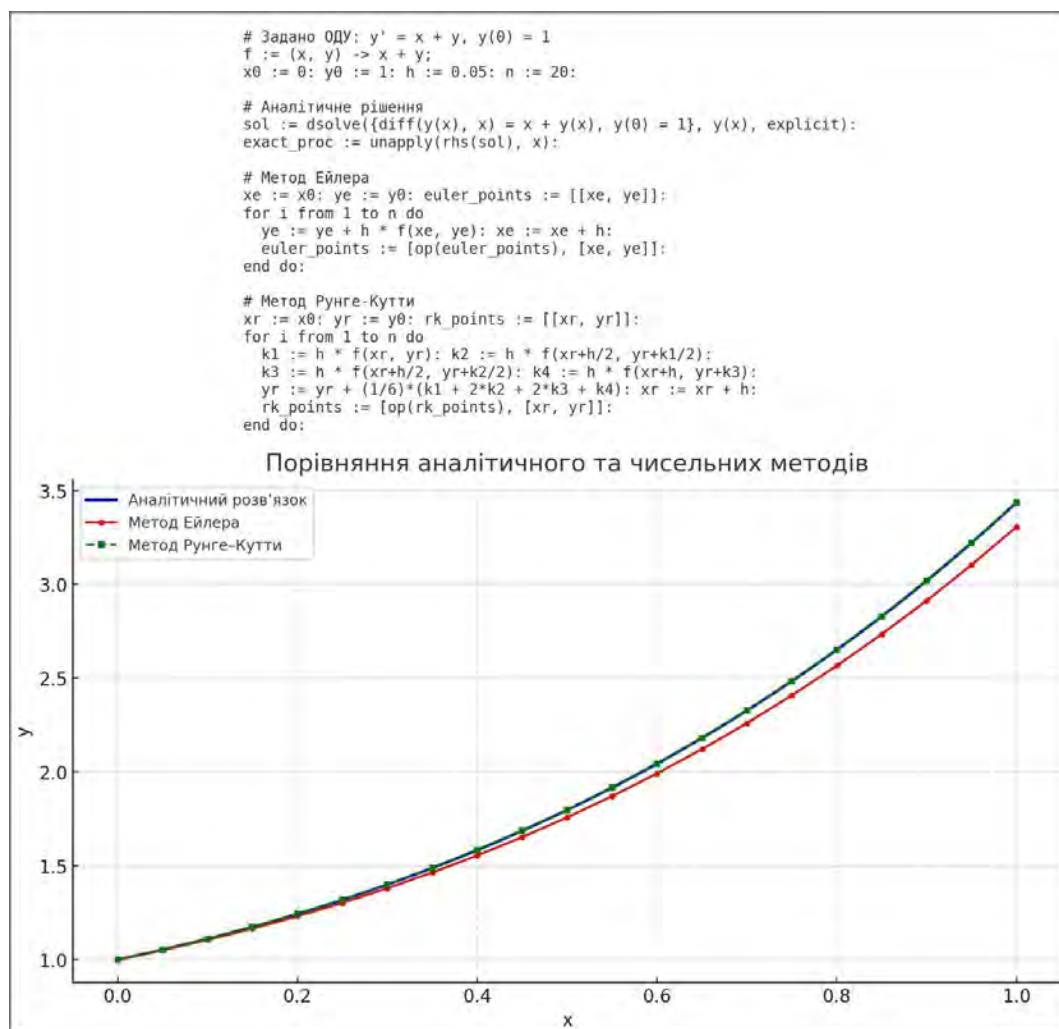


Рис. 4. Реалізація у *Maple* порівняльного аналізу розв'язків

- *Проектне навчання на основі реальних моделей.* Деякі курси впроваджують підсумкові мініпроекти, де студенти повинні застосувати диференціальні рівняння для моделювання конкретної прикладної ситуації.

Приклад 1. Моделювання руху маятника з опором середовища.

Опис: студенти будують математичну модель руху фізичного маятника, враховуючи сили опору (наприклад, повітряний опір або тертя).

Програмні засоби: Python, MATLAB, Maple, середовище STELLA.

Очікувані результати: чисельне розв'язання диференціального рівняння другого порядку; графічне представлення амплітуди та швидкості маятника у часі; дослідження впливу коефіцієнта тертя на згасання коливань (рис. 5, 6).

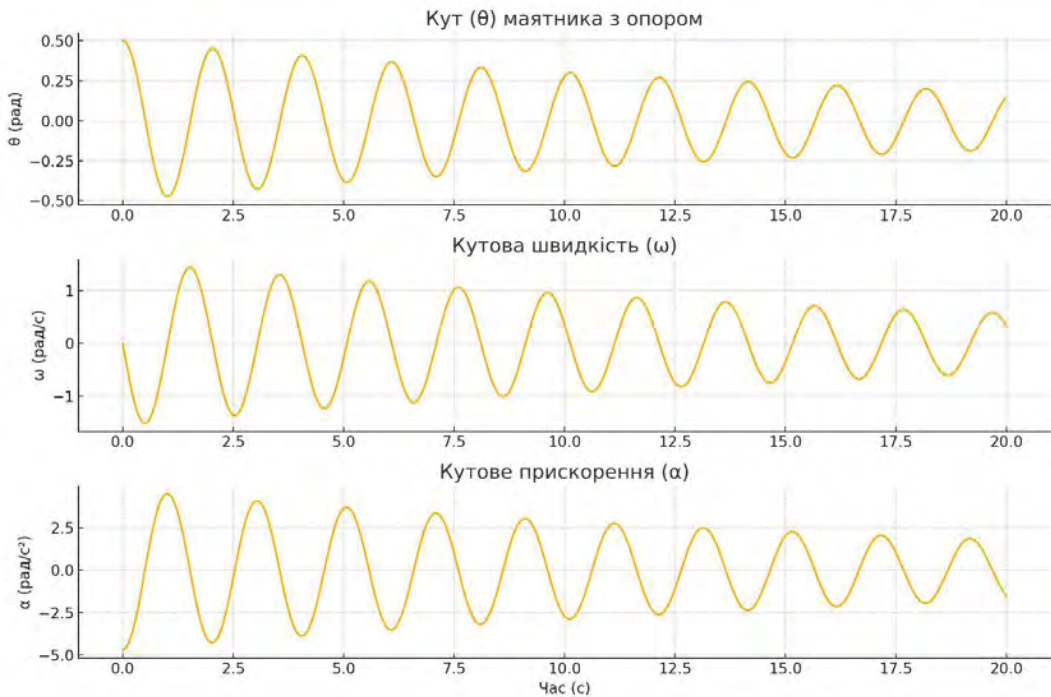


Рис. 5. Модель маятника з опором середовища

Графіки на рис. 5, 6 ілюструє класичний приклад згасаючих коливань, де опір середовища гасить енергію системи.

Приклад 2. Теплопровідність у матеріалах.

Опис: студенти розв'язують рівняння теплопровідності для різних геометричних областей та матеріалів.

Програмні засоби: MATLAB, Python, Maple, Wolfram Mathematica.

Очікувані результати: візуалізація температурного розподілу в часі; аналіз ефективності теплоізоляційних матеріалів; дослідження впливу зовнішніх умов на теплові процеси.

Як один із результатів реалізації такого проекту на рис. 7 зображена модель поширення тепла у нескінченному стержні.

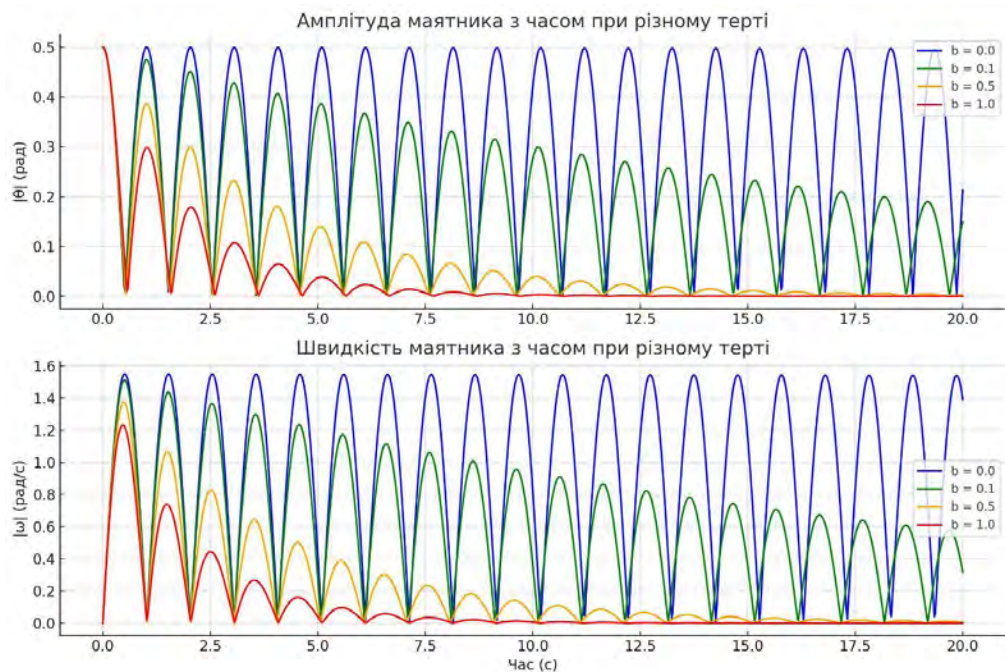


Рис. 6. Порівняльні графіки для різних значень коефіцієнта тертя b

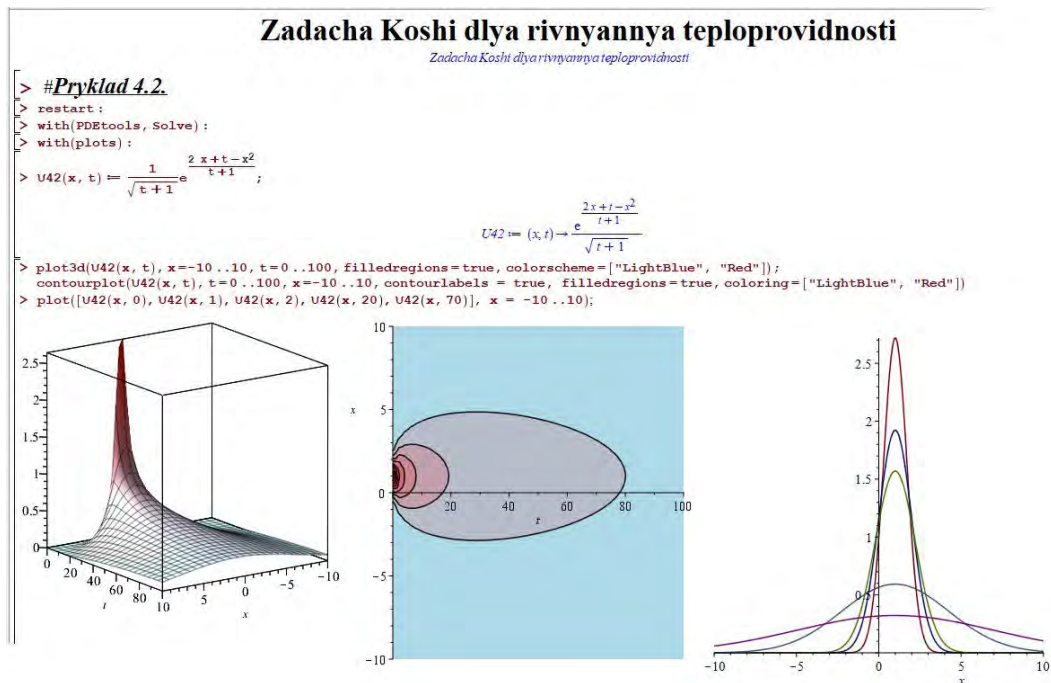


Рис. 7. Розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності, реалізований у пакеті Maple

Приклад 3. Моделювання епідеміологічних процесів (SIR-модель).

Опис: студенти розробляють математичну модель поширення інфекційного захворювання в популяції за допомогою системи диференціальних рівнянь SIR (Susceptible-Infected-Recovered).

Програмні засоби: Python (SciPy, Matplotlib), MATLAB, Wolfram Mathematica.

Очікувані результати: візуалізація змін у чисельності хворих, здорових і тих, хто одужав; аналіз впливу карантинних заходів на динаміку інфекції; оцінка критичних точок та прогнозування піку захворюваності.

На рис. 8 відображено динаміку змін трьох груп населення: сприйнятливих (S), інфікованих (I) та одужалих (R). Початково майже все населення є сприйнятливим до інфекції, що зумовлює стрімке зростання кількості інфікованих осіб. Зі зростанням частки інфікованих досягається епідемічний пік, після чого спостерігається зниження захворюваності внаслідок зменшення кількості сприйнятливих осіб та поступового одужання хворих. Частка одужалих постійно зростає, що свідчить про формування колективного імунітету. Модель демонструє типовий перебіг неконтрольованої епідемії, відображаючи основні фази її розвитку – поширення, пік та згасання – за умови відсутності втручання, таких як вакцинація чи ізоляція

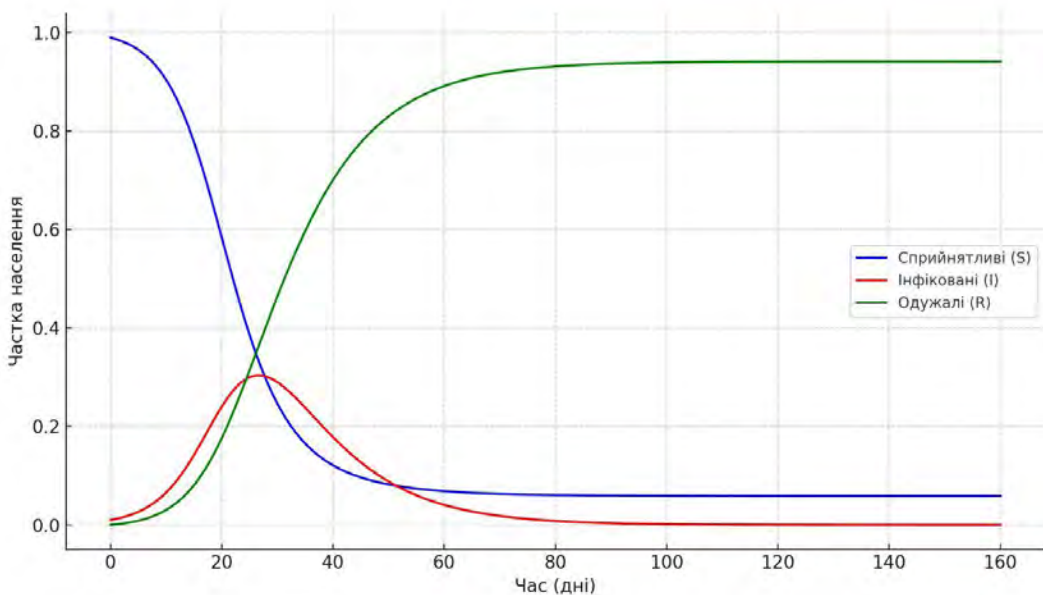


Рис. 8. SIR-модель поширення інфекції

У процесі проєктного навчання студенти стикаються з усіма аспектами: і з постановкою задачі, і з пошуком методів розв'язку, і з аналізом отриманих результатів. Такий проєктний підхід виявився дуже ефективним методично: студенти не лише закріплюють знання з курсу, але й підвищують впевненість у своїх силах застосовувати математику для вирішення реальних проблем. Багато хто із студентів відзначають, що вперше побачили «на власні очі» практичну цінність диференціальних рівнянь, що значно підвищило зацікавленість предметом.

Висновки та перспективи подальших розвідок. Проведене дослідження підтверджує, що ефективне викладання курсу диференціальних рівнянь потребує відмови від винятково алгоритмічного стилю навчання на користь підходів, орієнтованих на глибоке змістове розуміння, міжпредметні зв'язки та практичну значущість матеріалу. Застосування множинних форм представлення (аналітичної, графічної, чисельної), контекстуалізація через прикладні задачі, активні методи взаємодії на заняттях, а також широке впровадження сучасних комп'ютерних технологій

і систем моделювання значно підвищують ефективність засвоєння знань. Результати практичних експериментів свідчать про зростання зацікавленості студентів, покращення навичок аналізу, підвищення впевненості у власних силах при розв'язанні задач прикладного характеру.

Подальші розвідки доцільно спрямувати на створення адаптивних навчальних курсів, здатних враховувати рівень підготовки і навчальні потреби різних категорій студентів, а також на глибше вивчення потенціалу інноваційних освітніх технологій – доповненої реальності, гейміфікації, штучного інтелекту – в організації навчання диференціальних рівнянь. Важливим також є розвиток систем зворотного зв'язку, що дозволяють оперативно діагностувати рівень розуміння студентами ключових понять і коригувати стратегії викладання з метою досягнення глибокого та стійкого засвоєння математичного матеріалу.

Використані джерела

- Клочко, В. І., & Бондаренко, З. В. (2004). Деякі аспекти методики застосування нових інформаційних технологій під час вивчення теми “Диференціальні рівняння” у вищому технічному навчальному закладі. *Науковий часопис Українського державного університету імені Михайла Драгоманова. Серія 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання*, 1(8), 92–98. <https://sj.edu.edu.ua/index.php/kosn/article/view/443>
- Клочко, В. (2019). Формування математичних компетентностей студентів технічних ВНЗ. *Науковий часопис Українського державного університету імені Михайла Драгоманова. Серія 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання*, 19(26), 64–67. <https://sj.edu.edu.ua/index.php/kosn/article/view/10>
- Кравченко, С. (2024). Теорія і практика технологізації освіти в Україні в контексті інтеграційних процесів. *Український педагогічний журнал*, (2), 57–69. <https://doi.org/10.32405/2411-1317-2024-2-57-69>
- Красножон, О. В. (2010). Комп'ютерна підтримка методів Адамса і Рунге-Кутта наближеного розв'язування диференціальних рівнянь. *Information Technologies and Learning Tools*, 19(5). <https://doi.org/10.33407/itl.v19i5.360>
- Марценюк, В., Сверстюк, А., Козодій, Н., Кареліна, О., & Загородна, Н. (2021). Огляд математичних моделей в економіці на основі диференціальних рівнянь. *Computer-Integrated Technologies: Education, Science, Production*, (45), 26–31. <https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2021-45-04>
- Морозова, Л. (2024). Організація самостійної роботи студентів у закладах вищої освіти України. *Український педагогічний журнал*, (4), 152–162. <https://doi.org/10.32405/2411-1317-2024-4-152-162>
- Петренко, О., & Чепок, О. (2023). Щодо розробки факультативного курсу з елементів теорії диференціальних рівнянь для учнів закладів загальної середньої освіти. *Physical and Mathematical Education*, 38(2), 43–49. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-007>
- Сітак, І. В. (2018). *Методика навчання диференціальних рівнянь майбутніх бакалаврів з інформаційних технологій* [Неопубл. автореф. дис. канд. пед. наук]. Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова. https://npu.edu.ua/images/file/vidil_aspirant/avtoref/%D0%94_26.053.03/Sitak.pdf
- Страх, О., & Лукашова, Т. (2021). Міждисциплінарні зв'язки при вивченні деяких тем дискретної математики та диференціальних рівнянь. *Physical and Mathematical Education*, 29(3), 112–118. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2021-029-3-017>
- Фурсенко, О., Черновол, Н., & Бобрицька, Г. (2024). Математичні моделі бойових дій як засіб вдосконалення професійної орієнтованості викладання математичних дисциплін у ВНЗ. *Physical and Mathematical Education*, 39(1), 64–69. <https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i1-09>
- AlNajdi, S. M. (2022). The effectiveness of using augmented reality (AR) to enhance student performance: using quick response (QR) codes in student textbooks in the Saudi education system. *Educational technology research and development*. <https://doi.org/10.1007/s11423-022-10100-4>
- Dumanska, T., Smorzhevsky, Y., & Homeniuk, H. (2022). Stem-Competences of Future Mathematics Teachers and Methods of Their Formation. *Collection of Scientific Papers Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University Pedagogical Series*, 28, 7–11. <https://doi.org/10.32626/2307-4507.2022-28.7-11>
- Hubal, H., Siasiev, A., Sipii, V., Syrmamiikh, I., & Burtovy, S. (2024). Digital Technologies in the Process of Teaching STEM Disciplines: Challenges and Prospects. *Cadernos de Educação, Tecnologia e Sociedade*, 17(1), 445–458. <https://doi.org/10.14571/brajets.v17.n1.445-458>

- Jaramillo-Mediavilla, L., Basantes-Andrade, A., Cabezas-González, M., & Casillas-Martín, S. (2024). Impact of Gamification on Motivation and Academic Performance: A Systematic Review. *Education Sciences*, 14(6), 639. <https://doi.org/10.3390/educsci14060639>
- Khotimah, R. P., Adnan, M., Ahmad, C. N. C., & Murtiyasa, B. (2022). The development of STEM-based discovery learning module in differential equations: One-to-one evaluation. *4th international conference on frontiers of biological sciences and engineering (fbse 2021)*. AIP Publishing. <https://doi.org/10.1063/5.0099799>
- Lampropoulos, G., Keramopoulos, E., Diamantaras, K., & Evangelidis, G. (2022). Augmented Reality and Gamification in Education: A Systematic Literature Review of Research, Applications, and Empirical Studies. *Applied Sciences*, 12(13), 6809. <https://doi.org/10.3390/app12136809>
- Lozada, E., Guerrero-Ortiz, C., Coronel, A., & Medina, R. (2021). Classroom Methodologies for Teaching and Learning Ordinary Differential Equations: A Systemic Literature Review and Bibliometric Analysis. *Mathematics*, 9(7), 745. <https://doi.org/10.3390/math9070745>
- Pekh, P., Lavrenchuk, S., Miskevych, O., & Diachenko, R. (2022). Порівняльний аналіз методів розв'язування диференціальних рівнянь засобами MATLAB та MATLAB SIMULINK. *Computer-Integrated Technologies: Education, Science, Production*, (48), 103–110. <https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2022-48-16>
- Verma, N. (2023, 19 лютого). *How Effective is Gamification in Education? 10 Case Studies and Examples – Axon Park*. Axon Park. <https://axonpark.com/how-effective-is-gamification-in-education-10-case-studies-and-examples/#:~:text=A%20study%20was%20conducted%20among,Technical%20University%20of%20Athens,%20Greece>

References

- AlNajdi, S. M. (2022). The effectiveness of using augmented reality (AR) to enhance student performance: using quick response (QR) codes in student textbooks in the Saudi education system. *Educational technology research and development*. <https://doi.org/10.1007/s11423-022-10100-4> (in English).
- Dumanska, T., Smorzhevsky, Y., & Homeniuk, H. (2022). Stem-Competences of Future Mathematics Teachers and Methods of Their Formation. *Collection of Scientific Papers Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University Pedagogical Series*, 28, 7–11. <https://doi.org/10.32626/2307-4507.2022-28.7-11> (in Ukrainian).
- Fursenko, O., Chernovol, N., & Bobrytska, H. (2024). Matematychni modeli bioivnykh dii yak zasib vdoskonalennia profesiinoi oriietovanosti vykladannia matematychnykh dystsyplin u vvnz. *Physical and Mathematical Education*, 39(1), 64–69. <https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i1-09> (in Ukrainian).
- Hubal, H., Siasiev, A., Sipii, V., Syrmamiikh, I., & Burtovyi, S. (2024). Digital Technologies in the Process of Teaching STEM Disciplines: Challenges and Prospects. *Cadernos de Educação, Tecnologia e Sociedade*, 17(1), 445–458. <https://doi.org/10.14571/brajets.v17.n1.445-458> (in English).
- Jaramillo-Mediavilla, L., Basantes-Andrade, A., Cabezas-González, M., & Casillas-Martín, S. (2024). Impact of Gamification on Motivation and Academic Performance: A Systematic Review. *Education Sciences*, 14(6), 639. <https://doi.org/10.3390/educsci14060639> (in English).
- Khotimah, R. P., Adnan, M., Ahmad, C. N. C., & Murtiyasa, B. (2022). The development of STEM-based discovery learning module in differential equations: One-to-one evaluation. *U 4th international conference on frontiers of biological sciences and engineering (fbse 2021)*. AIP Publishing. <https://doi.org/10.1063/5.0099799> (in English).
- Klochko, V. (2019). Formuvannia matematychnykh kompetentnostei studentiv tekhnichnykh VNZ. *Naukovyi chasopys Ukrainskoho derzhavnoho universytetu imeni Mykhaila Drahomanova. Serii 2. Kompiuterno-oriietovani systemy navchannia*, 19(26), 64–67 (in Ukrainian).
- Klochko, V. I., & Bondarenko, Z. V. (2004). Deiaki aspekty metodyky zastosuvannia novykh informatsiinykh tekhnolohii pid chas vyvchennia temy “Dyferentsialni rivniannia” u vyshchomu tekhnichnomu navchalnomu zakladi. *Naukovyi chasopys Ukrainskoho derzhavnoho universytetu imeni Mykhaila Drahomanova. Serii 2. Kompiuterno-oriietovani systemy navchannia*, 1(8), 92–98 (in Ukrainian).
- Krasnozhon, O. B. (2010). Kompiuterna pidtrymka metodiv Adamsa i Runhe-Kutta nablyzhenoho rozviazuvannia dyferentsialnykh rivnian. *Information Technologies and Learning Tools*, 19(5). <https://doi.org/10.33407/itlt.v19i5.360> (in Ukrainian).
- Kravchenko, S. (2024). Teoriia i praktyka tekhnolohizatsii osvity v Ukraini v konteksti intehtratsiinykh protsesiv. *Ukrainian Educational Journal*, (2), 57–69. <https://doi.org/10.32405/2411-1317-2024-2-57-69> (in Ukrainian).

- Lampropoulos, G., Keramopoulos, E., Diamantaras, K., & Evangelidis, G. (2022). Augmented Reality and Gamification in Education: A Systematic Literature Review of Research, Applications, and Empirical Studies. *Applied Sciences*, 12(13), 6809. <https://doi.org/10.3390/app12136809> (in English).
- Lozada, E., Guerrero-Ortiz, C., Coronel, A., & Medina, R. (2021). Classroom Methodologies for Teaching and Learning Ordinary Differential Equations: A Systemic Literature Review and Bibliometric Analysis. *Mathematics*, 9(7), 745. <https://doi.org/10.3390/math9070745> (in English).
- Martseniuk, V., Sverstiuk, A., Kozodii, N., Karelina, O., & Zahorodna, N. (2021). Ohliad matematychnykh modelei v ekonomitsi na osnovi dyferentsialnykh rivnian. *Computer-Integrated Technologies: Education, Science, Production*, (45), 26–31. <https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2021-45-04> (in Ukrainian).
- Morozova, L. (2024). Orhanizatsiia samostiinoi roboty studentiv u zakladykh vyshchoi osvity ukrainy. *Ukrainian Educational Journal*, (4), 152–162. <https://doi.org/10.32405/2411-1317-2024-4-152-162> (in Ukrainian).
- Pekh, P., Lavrenchuk, S., Miskevych, O., & Diachenko, R. (2022). Porivnialnyi analiz metodiv rozviazuvannia dyferentsialnykh rivnian zasobamy matlab ta matlab simulink. *Computer-Integrated Technologies: Education, Science, Production*, (48), 103–110. <https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2022-48-16> (in English).
- Petrenko, O., & Chepok, O. (2023). Shchodo rozrobky fakultatyvnoho kursu z elementiv teorii dyferentsialnykh rivnian dlia uchniv zakladiv zahalnoi serednoi osvity. *Physical and Mathematical Education*, 38(2), 43–49. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-2-007> (in Ukrainian).
- Sitak, I. V. (2018). *Metodyka navchannia dyferentsialnykh rivnian maibutnikh bakalavriv z informatsiynykh tekhnologii* [Neopubl. avtoref. dys. kand. ped. nauk]. Natsionalnyi Pedagogichnyi Universytet imeni M. P. DrahomANOVA (in Ukrainian).
- Strakh, O., & Lukashova, T. (2021). Mizhdystsyplynarni v'iazky pry vyvchenni deiakykh tem dyskretnoi matematyky ta dyferentsialnykh rivnian. *Physical and Mathematical Education*, 29(3), 112–118. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2021-029-3-017> (in Ukrainian).
- Verma, N. (2023, 19 liutoho). *How Effective is Gamification in Education? 10 Case Studies and Examples - Axon Park*. Axon Park. <https://axonpark.com/how-effective-is-gamification-in-education-10-case-studies-and-examples/#:~:text=A%20study%20was%20conducted%20among,Technical%20University%20of%20Athens,%20Greece> (in English).

Andrii Siasiev, Ph.D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis and Optimisation, Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, Ukraine.

Research interests: mathematical modelling, differential equations, theoretical and methodological foundations of higher and general secondary education, information technologies and teaching aids.

ASPECTS OF THE METHODOLOGY OF TEACHING DIFFERENTIAL EQUATIONS: MODERN APPROACHES, DIFFICULTIES AND METHODS OF OVERCOMING THEM

Abstract. The article presents a set of modern methodological approaches to teaching differential equations in higher education, aimed at overcoming common difficulties students face in mastering both theoretical foundations and the applied content of the course. It is noted that the traditional focus on mechanical computation often fails to ensure deep understanding; therefore, it is advisable to shift the emphasis of the learning process toward developing conceptual insight. One of the leading approaches is the use of multiple representations (analytical, graphical, tabular), which enables students to comprehend concepts from different perspectives, develop the ability to switch between forms of information presentation, and gain a better understanding of the nature of differential equation solutions.

An important component is the contextualization of mathematical abstractions through real-world application problems from the natural and socio-economic sciences. Students work with models that have specific meaning – radioactive decay, population dynamics, epidemiological processes, heat exchange, etc. – which reduces anxiety when studying complex topics and increases interest in the subject. Active learning methods – discussions, small groups, inquiry-based questions, analysis of typical mistakes – contribute to the development of critical thinking, independent analysis skills, and collaborative problem-solving.

Significant attention is given to the use of digital technologies. The article shares experience in using computer algebra systems (Maple, Mathematica, MATLAB), visualization tools (GeoGebra, GeomED, STELLA), and even spreadsheets for implementing numerical methods. Examples are provided of educational projects in which students model real-world processes – pendulum motion, disease spread, heat exchange – completing the full cycle from problem formulation to interpretation of results. This approach promotes not only material comprehension but also the development of interdisciplinary thinking, research skills, and confidence in using mathematics as a tool for exploring the real world. The article may be of interest to mathematics educators, methodologists, researchers, and anyone involved in improving mathematics education.

Keywords: differential equations; multiple representations; computer modeling; visualization; active learning; project-based approach; contextualization; computer algebra systems.